

# Logistisches Wachstum

Referat von Pascal Bihler, 13, (17.1.2000)

In einer endlichen Welt kann weder lineares noch exponentielles Wachstum unbegrenzt andauern; irgendwann ist eine Grenze erreicht, die nicht überschritten werden kann. Meistens sind diese Grenze äussere Umwelteinflüsse, wie ein begrenztes Nahrungs- oder Ausbreitungsangebot.

Die einzige Population, die ein ungehindertes Wachstum aufweist, ist die Art Homo Sapiens. Exponentielles Wachstum lässt sich nur verwirklichen, wenn keine Feinde, kein Nahrungsmangel, insgesamt also optimale Lebensbedingungen und genug Raum zur Ausbreitung vorhanden sind. Unter besonderen Verhältnissen (Seuchen, kriegerische Zerstörung) sowie unter natürlichen Beobachtungen kann die Abnahme eines Populationswachstums bei zunehmender Populationsgröße vermuten lassen, dass die Populationsgröße selbst auf die Geburtenrate hemmend und/oder auf die Sterblichkeit fördernd wirkt. Eine einfache modellhafte Formulierung, die dieser Aussage Ausdruck gibt, ist die logistische Formel des Populationswachstums.

Ein mathematisches Modell, in dem dies berücksichtigt wird, ist das logistische Wachstum, das der Belgier **Pierre-Francois Verhulst (1804 - 1849)** im Jahre 1837 vorschlug. Durch eine mit steigender Population fallende Wachstumsrate sorgt er dafür, dass schließlich ein stabiles Gleichgewicht erreicht wird.

Dieses Modell kommt der Realität sehr nah, da es mehr Faktoren als das lineare, beschränkte oder exponentielle Wachstum berücksichtigt. Betrachtet man jedoch zum Beispiel Bevölkerungszahlen, so erkennt man, dass global gesehen die Weltbevölkerungs- Wachstumsrate steigt. Man kann also nie die Realität, das Leben berechnen, sondern nur Prognosen anstellen. Komplexe mathematische Modelle kommen der Praxis jedoch oft sehr nah.

*(Folie Grafik 1)*

In diesem Diagramm erkennt man, daß die Anzahl der Bakterien, die auf der y-Achse aufgetragen ist, am Anfang langsam steigt, die Wachstumsrate also gering ist. Sie nimmt jedoch dann zu, bis 50 % des Sättigungsmankos (oder der maximalen Anzahl an Bakterien ) erreicht worden sind. Nun nimmt die Wachstumsrate wieder ab, bis sie schließlich wieder gegen Null strebt.

**ERKLÄRUNG:** Die anfangs wenigen Bakterien können sich aufgrund ihrer geringen Anzahl nur wenig vermehren und das Sättigungsmanko spielt noch eine geringe bzw. keine Rolle für die Fortpflanzung. Der 1. Teil des Logarithmischen Wachstums gleicht einem exponentiellen Wachstum.

Der 2. Teil gleicht jedoch einem begrenzten Wachstum, da mit zunehmender Anzahl jetzt die Wachstumsrate sinkt. Da das Sättigungsmanko immer kleiner wird, nimmt die Wachstumsrate immer mehr ab, bis sie schließlich gegen Null strebt. Die Sättigung ist dann erreicht.

Das Logistische Wachstum kann für die Beschreibung verschiedenster natürlicher Vorgänge verwendet werden, zum Beispiel:

Schneeschuhhase, Karibu und arktische Schneehasen

Wühlmaus-Art *Lemmus lemmus*

periodische Zikaden;

(Larven von Insekten, die in den USA vorkommen)

sog. „Zigeunermotte“ (*Lymantria dispar*) in den USA

Maikäfergenerationen

für Probleme der Genetik

Lerntheorie

Insektenforschung

Laser-Physik

Theorie der Molekularentwicklung

Turbulente Flüssigkeitsströmungen

Belousov-Zhabotinski-Reaktion in der Chemie .

Beim exponentiellen Wachstum ist die Steigerungsrate immer abhängig vom momentanen Bestand:  $f'(t) = k \cdot f(t)$

Beim exponentiellen Wachstum ist die Steigerungsrate immer abhängig vom verfügbaren Rest:  $f'(t) = k \cdot [G - f(t)]$

Das logistische Wachstum beinhaltet beide Faktoren (Folie).

Die Wachstumsrate  $f'(x)$  ist also zu beiden Faktoren proportional:

$$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot [G - f(t)]$$

Herleitung einer Gleichung:

Das Wachstum ist proportional zum momentanen Bestand ( $f'(t) \sim f(t)$ ) und zum Rest ( $f'(t) \sim G - f(t)$ ). Also ist das Wachstum proportional zum Produkt beider Faktoren ( $f'(t) \sim f(t) \cdot [G - f(t)]$ ).

Aus dieser Proportionalität können wir mit Hilfe einer Konstanten „k“ eine Differentialgleichung machen:  $f'(t) = k \cdot f(t) \cdot [G - f(t)]$  bzw.

$$k = \frac{f'(t)}{f(t) \cdot [G - f(t)]}$$

Da das k sich aber aus den Bestandteilen des exponentiellen und des beschränkten Wachstums zusammensetzt, können wir k auch wie folgt

definieren:  $k = A \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} + B \cdot \frac{f'(t)}{G - f(t)}$  (k vom expon. mit Korrekturfaktor

A; k vom beschr. mit Korrekturfaktor B)

Dies ergibt die Gleichung  $k = A \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} + B \cdot \frac{f'(t)}{G - f(t)} = \frac{f'(t)}{f(t) \cdot [G - f(t)]}$  die für

$A = B = \frac{1}{G}$  erfüllt ist. Wir können k also als  $\frac{f'(t)}{G \cdot f(t)} + \frac{f'(t)}{G \cdot [G - f(t)]}$  schrei-

ben. Wenn wir nun auf beiden Seiten integrieren

$$\frac{1}{G} \cdot \int \frac{f'(t)}{f(t)} dt + \frac{1}{G} \cdot \int \frac{f'(t)}{[G - f(t)]} dt = k \cdot \int dt \text{ erhalten wir}$$

$$\frac{1}{G} \cdot \ln |f(t)| + \frac{1}{G} \cdot \ln |G - f(t)| = k \cdot t + c$$

Da  $f(x) > 0$  und  $G - f(x) > 0$  kann man die Betragsstriche entfallen

lassen und erhält  $\frac{1}{G} \cdot (\ln f(t) - \ln[G - f(t)]) = k \cdot t + c$  bzw.  $\ln \frac{f(t)}{G - f(t)} = G \cdot (k \cdot t + c)$

Auf beiden Seiten exponieren:

$$\frac{f(t)}{G - f(t)} = e^{G \cdot (kt+c)} \Leftrightarrow f(t) = G \cdot e^{G \cdot (kt+c)} - f(t) \cdot e^{G \cdot (kt+c)}$$

auf die andere Seite:  $f(t) \cdot (1 + e^{G \cdot (kt+c)}) = G \cdot e^{G \cdot (kt+c)}$

$$f(t) = \frac{G \cdot e^{G \cdot (kt+c)}}{1 + e^{G \cdot (kt+c)}} = \frac{G}{1 + e^{-G \cdot (kt+c)}}$$

für  $b = e^{-G \cdot c}$  gilt dann  $f(t) = \frac{G}{1 + b \cdot e^{-Gkt}}$

bzw. bei  $a = \frac{1}{b}$  gilt

$$f(t) = \frac{a \cdot G}{a + e^{-Gkt}}$$

## Aufgabe 21; Seite 364

a) Wir nehmen die zweite Gleichung  $f(t) = \frac{a \cdot G}{a + e^{-Gkt}}$ , und haben  $G=350$ ,  
und  $f(0)=20 \Rightarrow$

$$\frac{a \cdot G}{a + 1} = 20 \Rightarrow a \cdot G = 20 \cdot a + 20 \Rightarrow a(G - 20) = 20 \Rightarrow a = \frac{20}{G - 20}$$

für  $G=350$  ergibt dies  $a = \frac{20}{330} = \frac{2}{33}$

Unsere Wachstumsgleichung lautet also  $f(t) = \frac{2}{33} \cdot \frac{G}{\left(\frac{2}{33} + e^{-Gkt}\right)} = \frac{2 \cdot G}{2 + 33e^{-Gkt}}$

aus  $f(1)=24$  folgt  $\frac{2 \cdot 350}{2 + 33e^{-350 \cdot k}} = 24 \Rightarrow 2 + 33e^{-350 \cdot k} = \frac{700}{24}$

auf beiden Seiten 2 abziehen:  $33e^{-350 \cdot k} = \frac{652}{24} \Rightarrow e^{-350 \cdot k} = \frac{163}{198} \Rightarrow 350 \cdot k = \ln \frac{163}{198}$

$k = \frac{-0,1945}{350}$  Daraus folgt die Wachstumsgleichung:  $\frac{700}{2 + 33e^{-0,1945t}}$

Grafik: (Folie)

b)  $f(t_1)$  soll  $0,95 \cdot 350 = 332,5$  sein.  $\frac{700}{2 + 33e^{-0,1945t_1}} = 332,5$

$t_1 = 29,55$  (Tage) entspr. 29 Tage, 13 Stunden, 12 Minuten

c) Maximales Wachstum bei  $f(t) = 0,5 \cdot G = 175$ ;

$$\frac{700}{2 + 33e^{-0,1945t_2}} = 332,5 \Leftrightarrow t_2 = 14,41 \text{ Tage}$$