

Anyonen in der Quanteninformatik

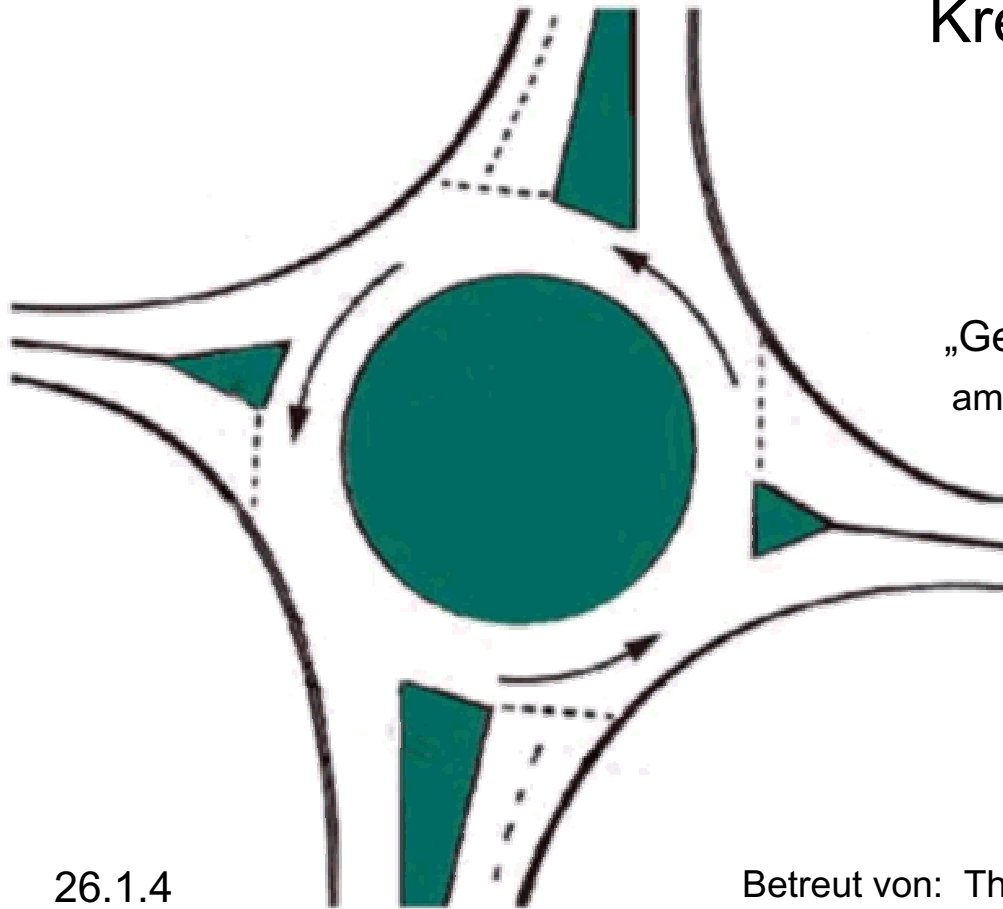
Kreisverkehr im Flachland

Vortrag von

Pascál Bihler

im Rahmen des Seminars

„Geheimnisse der Quanteninformatik“
am IAKS Beth - Universität Karlsruhe (TH)



26.1.4

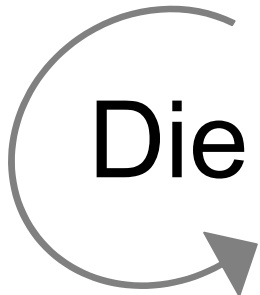
Betreut von: Thomas Decker



Fahrplan



- Was ist ein Anyon?
- Topologisch-Mathematische Eigenschaften
- Rechnen mit Anyonen
- Überlegungen zur Implementierung



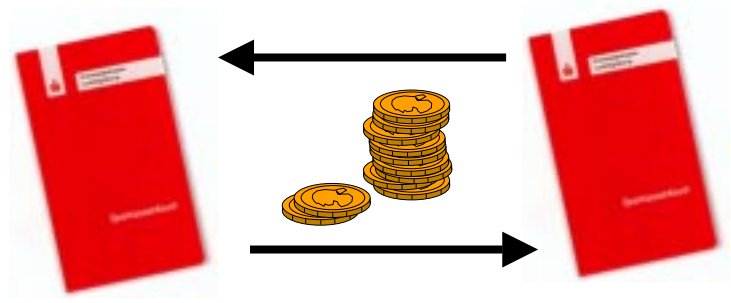
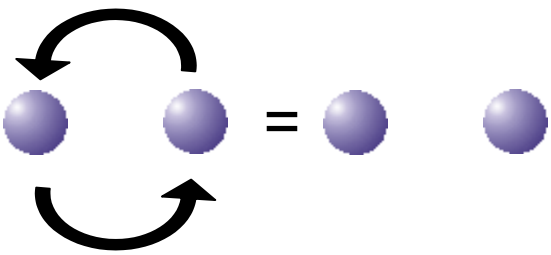
Die Welt der Quantenmechanik

- Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta x * \Delta p \approx \hbar$
- Welle-Teilchen Dualismus

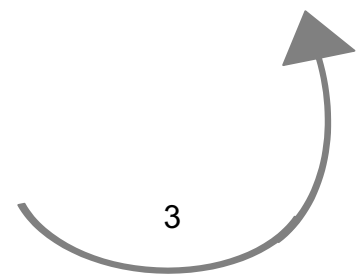
Wellenfunktion: $\Psi(x) \in \mathbb{C}$

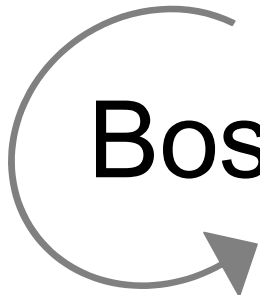
Aufenthaltswahrscheinlichkeit: $|\Psi(x)|^2$

- Elementar-Teilchen ununterscheidbar



$$|\Psi_{\text{neu}}(x)|^2 = |\Psi_{\text{alt}}(x) * \varphi|^2 = |\Psi_{\text{alt}}(x)|^2 \implies |\varphi| = 1$$





Bosonen und Fermionen

- $\varphi^2 = 1 \Rightarrow$ Zwei Sorten von Elementar-Teilchen:

Bosone

Symmetrische Wellenfunktion
Austauschphase $\varphi = 1$

Photonen, Mesonen, .

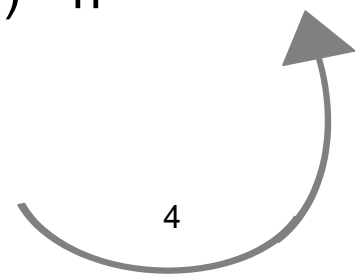
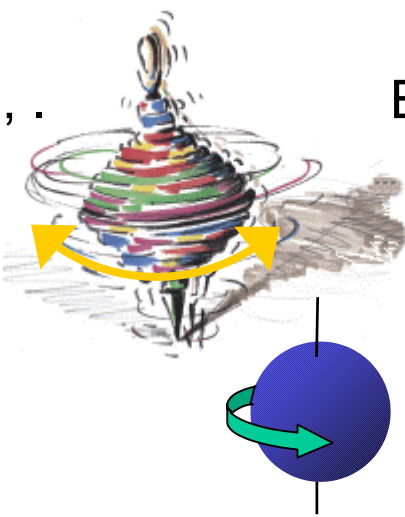
$$L = k * \hbar \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Fermionen

Antisymmetrische Wellenfunktion
Austauschphase $\varphi = -1$

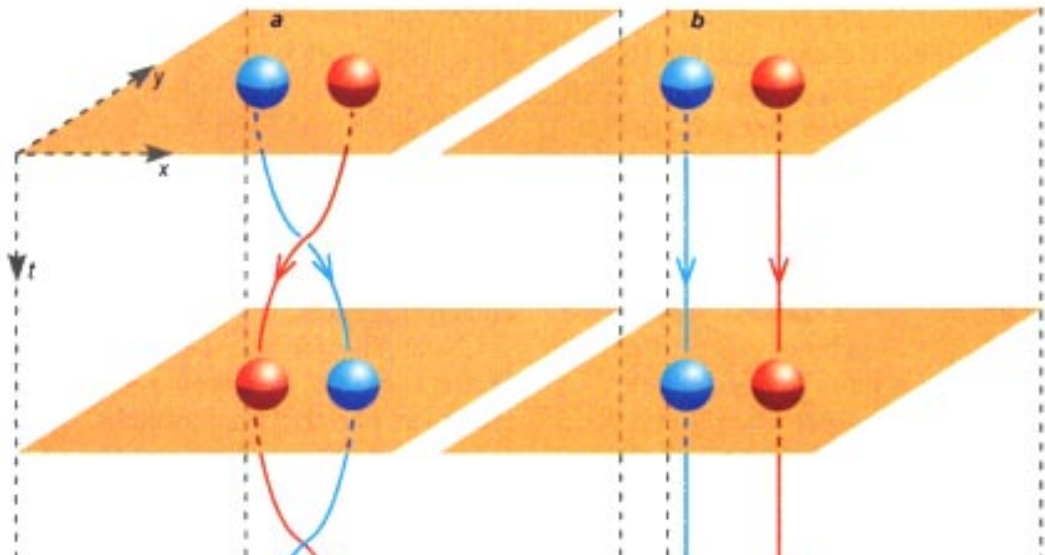
Elektronen, Neutronen, ...

$$L = \frac{1}{2} * (2k+1) * \hbar$$



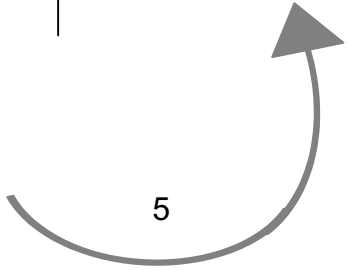
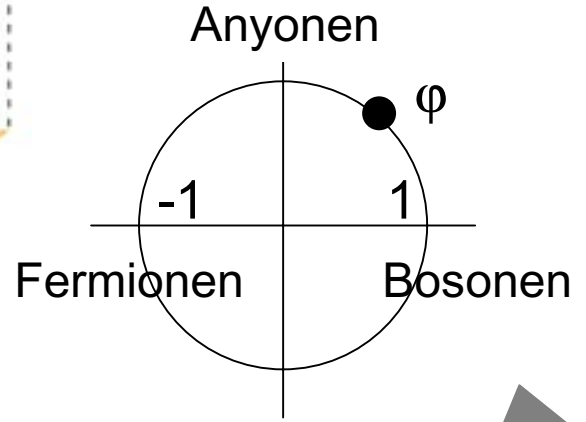


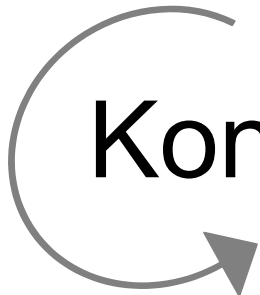
Anyonen



Frank Wilczek

$\Psi_{\text{neu}}(x) = \Psi_{\text{alt}}(x) * \varphi \neq \Psi_{\text{alt}}(x)$
 ⇒ φ beliebige komplexe Zahl mit $|\varphi| = 1$
 ⇒ Neue Teilchensorten: **Anyonen**
 ⇒ Quasiteilchen mit fraktioneller Statistik

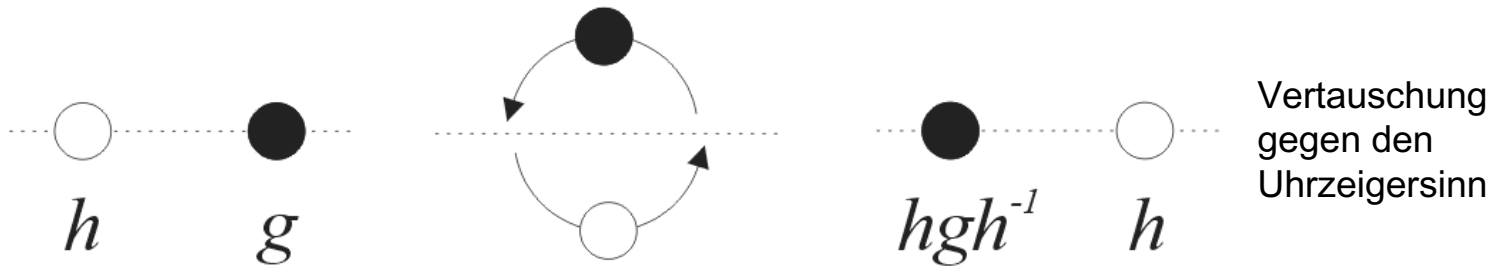




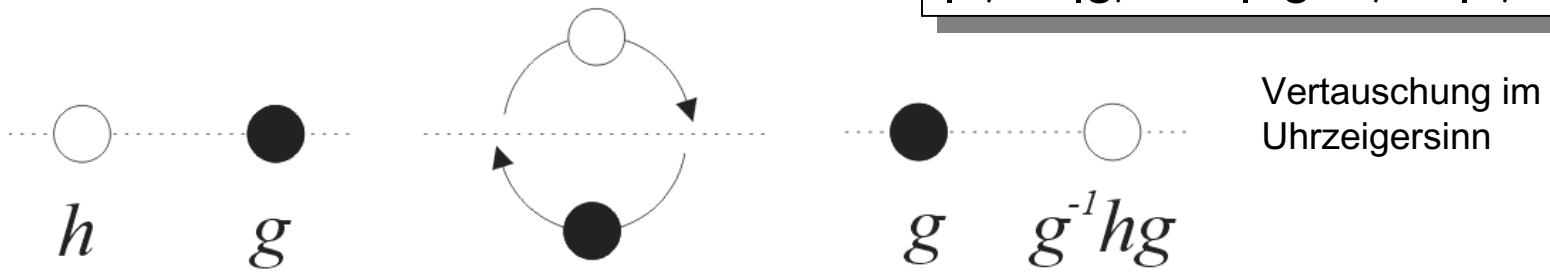
Konjugation des Flusses



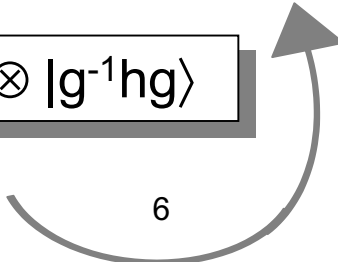
Fluss eines Anyons: $|g\rangle$
($g \in G$, G endliche Gruppe)



$$|h\rangle \otimes |g\rangle \rightarrow |hgh^{-1}\rangle \otimes |h\rangle$$

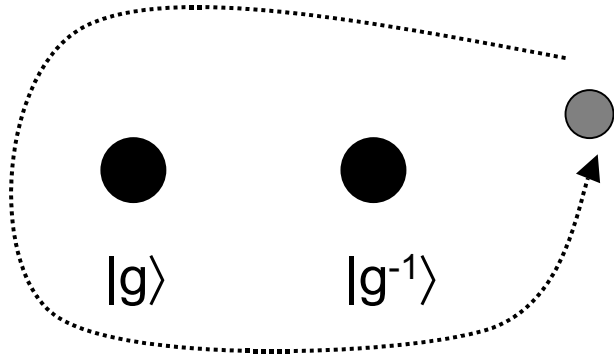


$$|h\rangle \otimes |g\rangle \rightarrow |g\rangle \otimes |g^{-1}hg\rangle$$

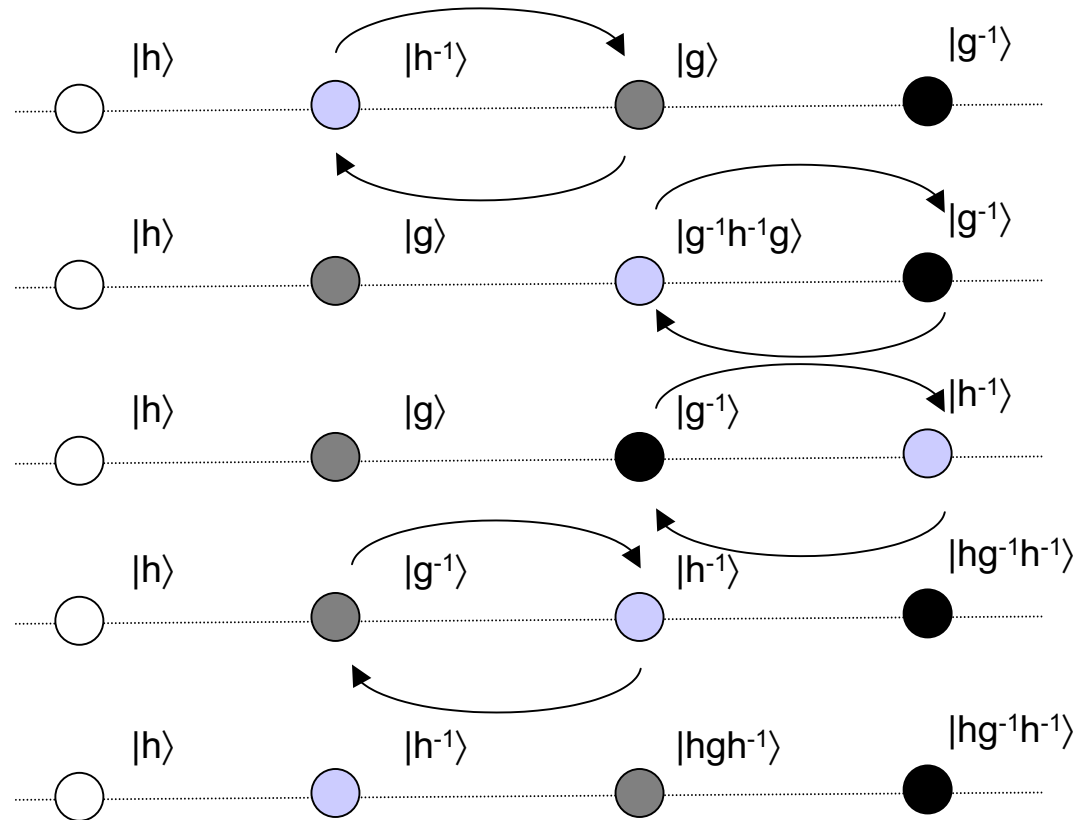




Konjugation mit Anyonenpaaren



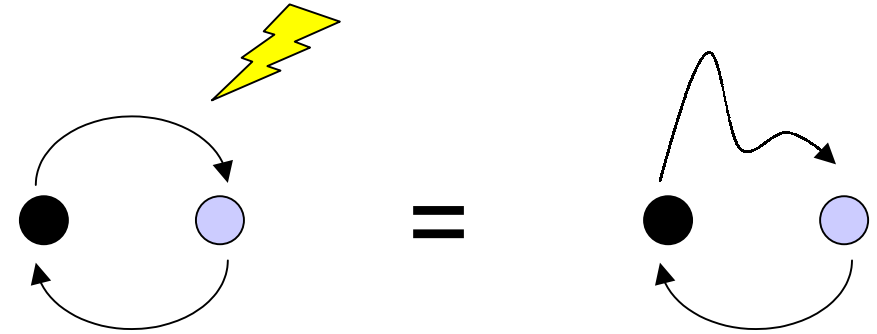
Anyonenpaar mit trivialem Fluss



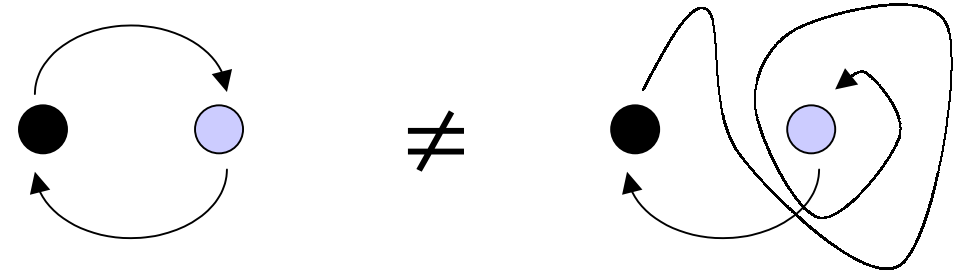
$$|h\rangle \otimes |g\rangle \rightarrow |h\rangle \otimes |hgh^{-1}\rangle$$



Fehlertoleranz



Topologisch äquivalent



Topologisch nicht äquivalent



Rechnen mit Anyonen

Rechen-Basis des Hilbertraums: $\{ |0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |d-1\rangle \}$

(d prim)

Mathematische Konstruktion:

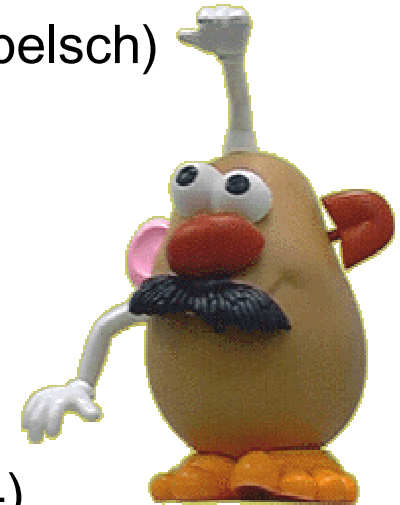


- G einfache und perfekte Gruppe (nicht abelsch)
- $a, b \in G, a*b \neq b*a$
- d kleinste Lösung von $a^d b a^{-d} = b$
- $|i\rangle = |a^i b a^{-i}\rangle$

Beispiel:



- $G = A_5$
- $d := 2 \Rightarrow a^2 = \text{Identität, z.B. } a = (1\ 2)(3\ 4)$
- wähle $b = (3\ 4\ 5)$
- $|0\rangle = |a^0 b a^{-0}\rangle = |b\rangle = |(3\ 4\ 5)\rangle$
- $|1\rangle = |a^1 b a^{-1}\rangle = |a b a^{-1}\rangle = |(4\ 3\ 5)\rangle$





Manipulation der Zustände

Zwei Grundoperatoren:

Z: Phasenverschiebung

$$Z|i\rangle = \omega^i|i\rangle$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega^{d-1} \end{pmatrix}$$

X: Verschiebe-Operator

$$X|i\rangle = |i+1\rangle$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ZX = XZ\omega$$



Universelle Quantengatter

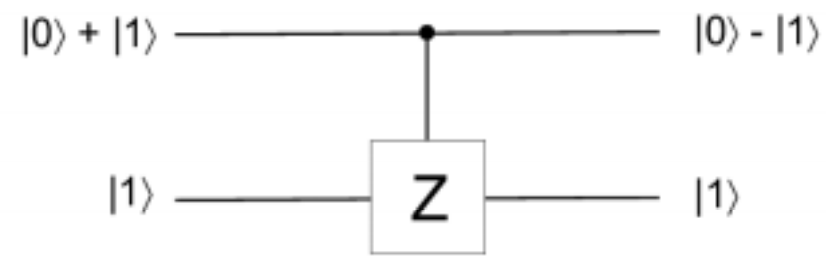
Universelle Grundoperationen:

- Toffoli: $T(|l,m,n\rangle) = |l,m,lm+n\rangle$

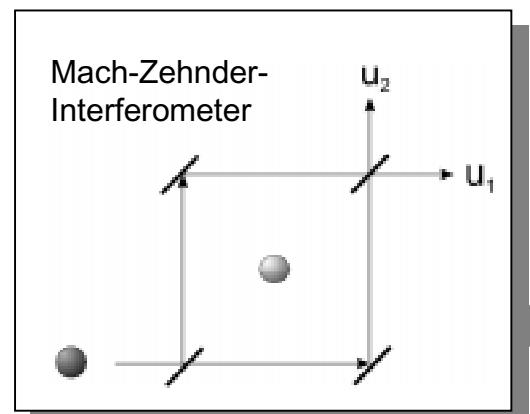
Berechnung möglich,
da jede Funktion $G^n \rightarrow G$ berechnet werden kann

- Nicht-Destruktives Messen von Z und X

$$Z: |\lambda\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow |\lambda\rangle \otimes (|0\rangle + \lambda |1\rangle)$$

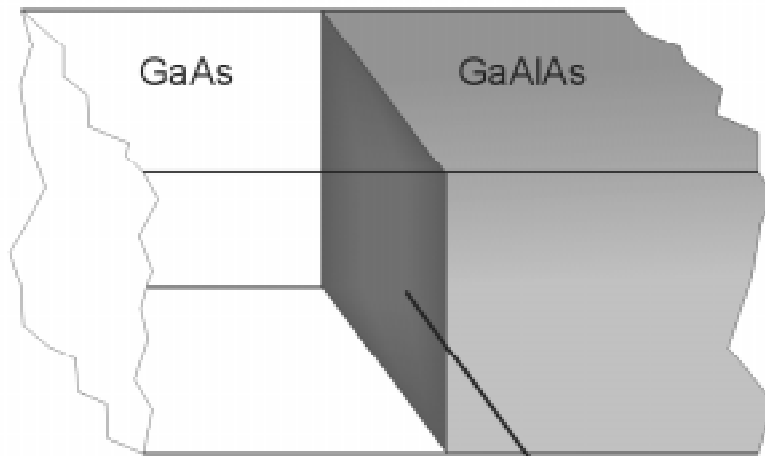


Tommaso Toffoli





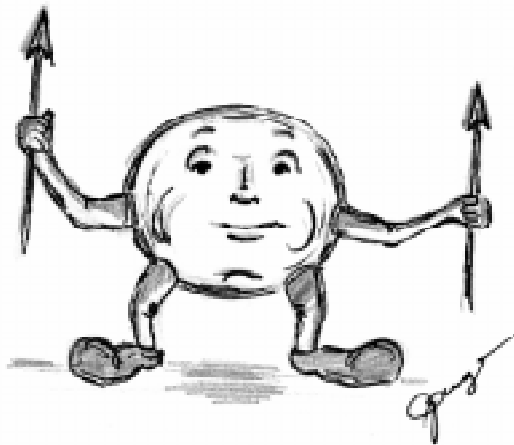
Zweidimensionale Elektronengase



2DEG



Grafik: Prof. Pfannkuche, Hamburg

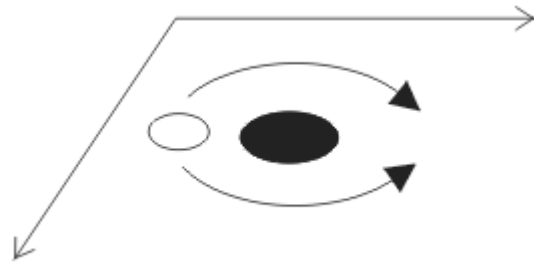


Grafik: Prof. Vidar Gudmundsson, Reykjavik

„Composite Fermions“
mit fraktioneller Ladung



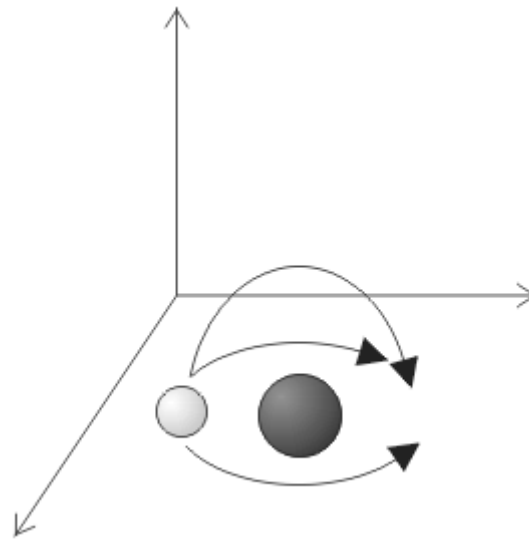
Topologisch nichttriviale Räume



2D-Raum mit Loch

Topologisch nichttrivial

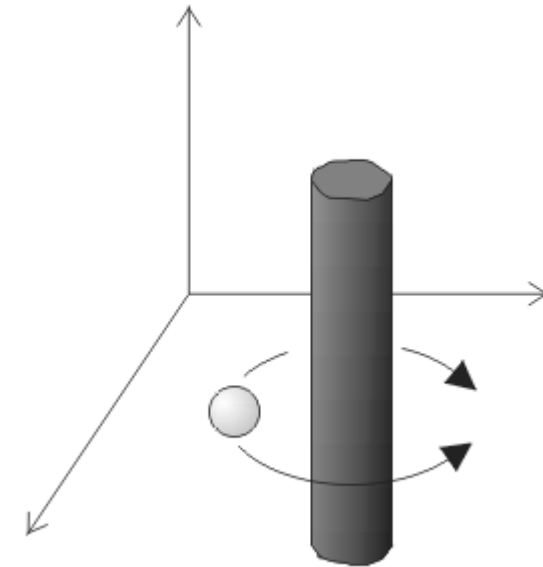
Anyonen möglich



3D-Raum mit Kugel

Topologisch trivial

**Nur Bosonen
und Fermionen**



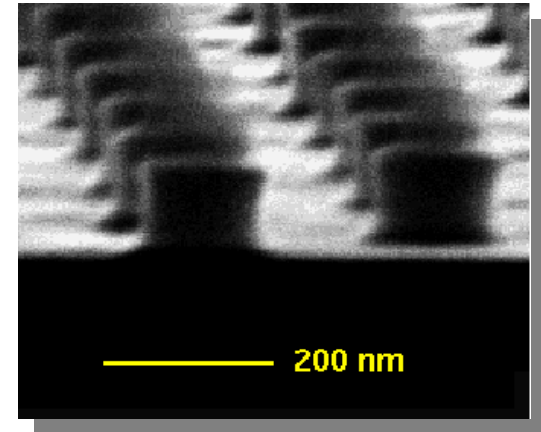
Aharonov-Bohm-Experiment

Topologisch nichttrivial

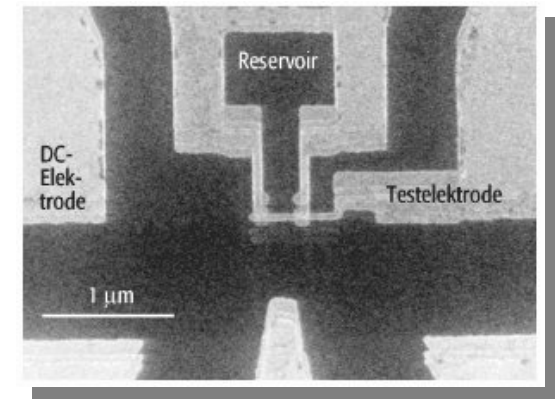
**Elektronen verhalten
sich wie Anyonen**

Résumé

- Überlegungen klingen sehr vielversprechend, aber viele physikalische Probleme.
- Topologische Quante -Effekte gibt es aber z.B. in Quantenpunkten oder Josephson-Kontakten.
- Weitere Fragen zum Thema



Quantenpunkte



supraleitender
Metall-Halbleite -Übergang
(*Josephson-Kontakt*)



Quellen & Grafiknachweis

- [GAM99] Gamboa, Jorge F., Jose L. Cortes und Luis F. Velaquez. Fraktionale Statistiken und Topologie. Spektrum der Wissenschaft, 06/1999. Seite 74. Heidelberg: Spektrum
- [GRIF00] Grith, T.G. et al. 2000. Evolution of Quasi-Particle Charge in the Fractional Quantum Hall Regime. Phys. Rev Lett. 85, 3918
- [LAN99] Lang, Georg Robert. 1999. Anyonische Quantenmechanik: Streutheorie und gebundene Zustände im Zweiteilchenfall. Fachbereich der Physik der FU Berlin. Berlin
- [MESCH72] Meschkowski, Herbert. 1972. Mathematisches Begriffswörterbuch. Mannheim: Bibliographisches Institut
- [MOCH03] Mochon, Carlos. 2003. Anyons from non-solvable finite groups are sufficient for universal quantum computation. Institute for Quantum Information, California Institute of Technology. Pasadena
- [PRES98] Preskill, John. 1998. Fault-Tolerant Quantum Computation. S 213 ff. in HoiKwong Lo, Sandu Popescu, Tim Spiller (Hrsg): Introduction to quantum computation and information. World Scientific Publishing Company
- [PHYS] 2000. Lexikon der Physik. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag
- [VED02] Vedral, Vlatko. 2002. Geometric phases and topological quantum computation. International Journal of Quantum Information, Vol.1, No.1 (2003).World Scientific Publishing Company

Grafiken:

- <http://www.cjonline.com/images/050401/new.roundabout.jpg>
- <http://www.autobahnpolizei.de/215.jpg>
- http://www.ksk-lb.de/privat/grafik/sparkomfort_sparbuch.jpg
- http://web.mit.edu/physics/facultyandstaff/faculty_images/frank_wilczek_2.jpg
- <http://hartree.raunvis.hi.is/~vidar/Nam/SSdDV/Flachland>
- <http://www.2pass.co.uk/crash.gif>
- <http://whyfiles.org/shorties/images3/phead1.gif>, [phead2.gif](http://whyfiles.org/shorties/images3/phead2.gif), [phead4.gif](http://whyfiles.org/shorties/images3/phead4.gif)
- <http://pm1.bu.edu/~tt/Toffoli.jpg>