

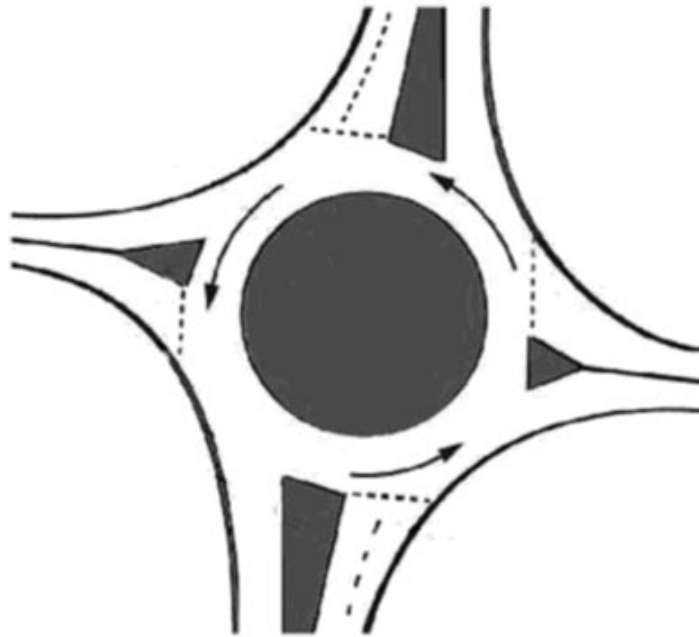
Universität Karlsruhe (TH)

Anyonen in der Quanteninformatik

Kreisverkehr im Flachland

Seminararbeit am IAKS Beth
im Rahmen des Seminars
„Geheimnisse der Quanteninformatik“
Wintersemester 2003/2004

Pascál Bihler



Erweiterte Fassung
27. Januar 2004

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Was ist ein Anyon?	3
2.1. Fermionen und Bosonen	3
2.2. Anyonen	4
3. Topologisch-Mathematische Eigenschaften von Anyonen	7
3.1. Konjugation von Anyonen durch Vertauschung	7
3.2. Fehlertoleranz der topologischen Aktionen	9
4. Rechnen mit Anyonen	11
4.1. Manipulation von Anyonen-Zuständen	11
4.2. Universelle Quanten-Gatter	12
4.2.1. Voraussetzungen für einen Anyonen-Rechner	13
4.2.2. Messen des Z-Operators	14
4.2.3. Messen des X-Operators	15
4.2.4. Konjugation eines Zustandes mit einer Funktion	16
5. Überlegungen zur Implementierung	17
5.1. Messen des magnetischen Flusses	17
5.2. Zweidimensionale Elektronengase	17
5.3. Topologisch nichttriviale Räume	18
5.4. Ausblick	19
A. Mathematische Grundbegriffe	20

1. Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Anyonen¹ und ihrer möglichen Verwendung in der Quanteninformatik. Es wird zunächst eine kurze physikalische Einführung zu Anyonen gegeben, um dann ihre spezifischen topologischen Eigenschaften zu beleuchten. Danach werden Möglichkeiten der Anwendung dieser Eigenschaften für quanteninformatische Berechnungen betrachtet, woran sich einige Überlegungen zur konkreten Implementierung eines Anyonen-gestützten Quanten-Computers anschließen. Erläuterungen zur verwendeten Mathematik finden sich am Ende der Arbeit.

2. Was ist ein Anyon?

„(..) Die Elementarteilchen [sind] nach ihrem statistischen Verhalten in zwei Klassen [gruppiert]: [Bosonen und Fermionen]“ [PHYS00] liest man in der Literatur, wenn man sich über die kleinsten nachgewiesenen Bausteine der Natur informiert. Dies ist so auch nicht falsch, wenn man nur den uns umgebenen, dreidimensionalen Raum betrachtet. Betrachtet man nun Teilchen in zweidimensionalen Umgebungen, so bleibt überraschenderweise die Zahl der möglichen Teilchenklassen nicht gleich, sondern die „Diskretisierung“ in zwei Klassen wird sozusagen aufgehoben: Es sind viele neue *Quasiteilchen*² möglich, die sowohl bosonische als auch fermionische Eigenschaften zeigen und alle unter dem Namen *Anyonen* zusammengefasst werden [GAM99].

2.1. Fermionen und Bosonen

Elementarteilchen sind so winzig, dass sich ihre Welt nur schwer mit dem uns Bekannten vergleichen lässt. Die Teilchen darf man sich nicht einfach als eindeutig unterscheidbare Billardkugeln vorstellen, die sich an einem genau bestimmbar Ort befinden und einen exakt messbaren Impuls besitzen. Sie gehorchen vielmehr den Gesetzen der Quantenmechanik; die Heisenbergsche Unschärferelation³ verbietet so die konkrete Messung beider physikalischen Größen. Anstelle einer exakten Orts- oder Wegangabe kann man nur Wahrscheinlichkeitswerte für den Aufenthalt eines Teilchens an einem bestimmten Ort (SCHRÖDINGERS Modell [GAM99]) bzw auf einem bestimmten Weg (Elementarteilchenmodell von FEYNMAN [GAM99]) nennen. Je nach Versuchsaufbau verhalten sich

¹Der in dieser Arbeit verwendete Begriff *Anyon* (im Plural *Anyonen*) entspricht dem in der englischsprachigen Fachliteratur verwendeten *anyon* („Beliebigteilchen“). Vor einer Verwechslung mit den aus der Chemie bekannten *Anionen* (negativ geladenen Ionen) sei gewarnt, da es sich hierbei um völlig verschiedene Teilchenarten handelt.

²Sich wie freie Teilchen verhaltende Elementaranregungen von Vielteilchensystemen. Im Gegensatz zu den Elementarteilchen können Quasiteilchen nicht als freie Teilchen existieren, da sie durch die Wechselwirkungen des sie erzeugenden Systems definiert werden [PHYS00].

³HEISENBERG hat 1927 erkannt, dass sämtliche Messungen der Gleichung $\Delta x * \Delta v \sim \hbar$ (*Heisenbergsches Wirkungsquantum* $\hbar = 1,054 * 10^{-34} = const$) gehorchen müssen. Dies bedeutet, dass die exakte Bestimmung des Aufenthaltsortes eines Objekts einen Fehler beim Messen seiner Geschwindigkeit hervorruft und umgekehrt. \hbar ist dabei so klein, dass diese Ungenauigkeit im täglichen Leben, zum Beispiel bei Radarmessungen, keine Rolle spielt. In den Größenordnungen, die wir hier betrachten, hat diese Gleichung jedoch teilweise schwer wiegende Konsequenzen.

Elementarteilchen nicht wie Teilchen, sondern wie Wellen: Sie können miteinander interferieren und sich gegenseitig verstärken bzw auslöschen. Daher werden einzelne Elementarteilchen und Systeme aus mehreren Elementarteilchen durch Wellenfunktionen beschrieben.

Mit dem so genannten *Welle-Teilchen-Dualismus* geht die Eigenschaft der *Ununterscheidbarkeit* klassischer quantenmechanischer Teilchen einher: während man zwei völlig gleiche Billardkugeln mit einer Farbmarkierung versehen kann und sich so nach einer Vertauschung diese Kugeln in einem anderen Zustand als zuvor befinden, führt die Vertauschung von Elementarteilchen zu keiner messbaren Zustandsänderung⁴ ($\Psi(x, y) = \pm\Psi(y, x)$). Dies bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeit, die Teilchen bei einer Messung an bestimmten Orten anzutreffen, nicht verändert hat. Da diese *Aufenthalts-Wahrscheinlichkeit* $p(x)$ der Teilchen an Position x mit dem Betragsquadrat der zugeordneten Wellenfunktion Ψ ermittelt wird (also $p(x) = |\Psi(x)|^2$), darf man zum ununterscheidbaren Teilchenaustausch (bei der die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für jeden beliebigen Punkt x_0 gleich bleibt) die Wellenfunktion nur mit einem *Phasenfaktor* $\varphi \in \mathbb{C}$, multiplizieren, dessen Betrag 1 ist (denn $|\Psi_{neu}(x_0)| = |\Psi_{alt}(x_0) * \varphi| \stackrel{!}{=} |\Psi_{alt}(x_0)|$). Da sich nach einem erneuten Austausch die beiden Teilchen wieder an der ursprünglichen Position befinden, muss gelten: $|\varphi|^2 = 1$. Für den Faktor φ , den man auch *Austauschphase* nennt, kommen also nur $\varphi_B = 1$ oder $\varphi_F = -1$ in Betracht. Im ersten Fall nennt man die zugehörige Wellenfunktion *symmetrisch* ($\Psi(x, y) = \Psi(y, x)$) und bezeichnet die zugehörigen Elementarpartikel als *Bosonen*⁵, die Elemente, deren Austauschphase -1 beträgt, werden *Fermionen* genannt⁶ und ihre Wellenfunktionen als *antisymmetrisch* ($\Psi(x, y) = -\Psi(y, x)$) bezeichnet.

Die Symmetrie der Wellenfunktion eines Elementarteilchens hat einen direkten Einfluss auf dessen Spin-Eigenschaften. Der *Spin*, den man sich vereinfacht als Eigen Drehimpuls eines Teilchens vorstellen kann, macht dieses empfindlich für Magnetfelder. Der Betrag des Spins ist dabei immer ein Vielfaches des Wirkungsquantums \hbar , bei Bosonen ganzzahlig ($0, 1, 2, \dots$), bei Fermionen „halbzahlig“ ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$).

2.2. Anyonen

Vertauscht man, wie im letzten Abschnitt diskutiert, Elementarteilchen im Raum zweimal miteinander, so ist der Zustand nach diesem Prozess derselbe wie davor, die Wellenfunktion nimmt also wieder ihre ursprüngliche Form an. Dies steht in einem Zusammenhang mit den topologischen Eigenschaften der zugehörigen Raumzeitbahnen: Betrachtet man die Bahnen der Teilchen in Raum und Zeit, so sind diese immer „unverknotet“, man kann sie in die *triviale Bewegung* (also das „Liegenlassen“) überführen. Besitzt der Raum nur eine x - und eine y -Komponente und führt man in der Ebene zweimal hintereinander den gleichen Vertauschungsvorgang aus, so „verknoten“ sich die Teilchen-Bahnen in der Raumzeit. Damit ist der Weg der Teilchen nicht mehr topologisch äquivalent zum

⁴Hierin ähneln Bosonen und Fermionen dem Guthaben auf einem Girokonto: Überweisen sich zwei Personen gegenseitig den gleichen Geldbetrag, so lässt sich anhand des vorhandenen Guthabens der Zustand vor der Überweisung nicht von dem nach der Überweisung unterscheiden.

⁵Vertreter der *Bosonen*klasse sind zum Beispiel Photonen und Mesonen.

⁶*Fermionen* sind zum Beispiel Elektronen, Protonen, Neutronen, Neutrinos und Quarks.

Weg bei trivialer Vertauschung und die Wellenfunktion der Teilchen darf unterschiedlich zur Funktion vor der Vertauschung sein (vgl Abb 1). Für die Austauschphase φ kommt jede komplexe Zahl φ mit $|\varphi|^2 = 1$ in Betracht. Da jede dieser Phasen einen anderen Teilchentyp beschreibt, gibt es in zweidimensionalen Umgebungen – zumindest theoretisch — überabzählbar unendlich viele verschiedene Teilchenarten, die Anyonen. Entdeckt bzw publik gemacht wurden die Anyonen Anfang der 1980-er Jahre am *Institute for Advanced Study, Princeton* von Frank Wilczek. Diese von ihm benannten Quasiteilchen können einen nicht-halbzahligen Spin besitzen (zB $\frac{3}{5}\hbar$) und zeigen zudem überraschende Zwitter-Eigenschaften: Zum einen gehorchen sie dem von den Fermionen bekannten *Pauli-Prinzip*⁷, zum anderen lassen sich auch für Bosonen typische *Kontakt-Wechselwirkungen*⁸ beobachten (vgl [GAM99]). Je nachdem, ob sich die Austauschphase eines Anyons näher bei -1 oder $+1$ befindet, tritt der eine oder der andere Effekt stärker auf. Fermionen und Bosonen sind demnach lediglich extreme Ausprägungen von Anyonen, die aber – im Gegensatz zu den übrigen Anyontypen – auch im dreidimensionalen Raum existieren können⁹.

⁷Zwei Fermionen dürfen sich nicht gleichzeitig in einem identischen Quanten-Zustand befinden, also die gleiche Energie, den gleichen Spin usw. besitzen. Diese Regel wurde nach WOLFGANG PAULI (1900-1958) benannt.

⁸Diese Kraft tritt bei Bosonen nur auf, sofern sich die Teilchen berühren und bewirkt deren Anhäufung in gleichen Zuständen. Sie tritt also sozusagen den Kräften des Pauli-Prinzips entgegen. Bei Anyonen lassen sich die Kontakt-Wechselwirkungen (im Gegensatz zu Bosonen) aber auch noch in extrem kleinen Abständen $\varepsilon > 0$ beobachten (siehe [GAM99]).

⁹Sonst könnten wir uns hier nicht mit dieser Thematik auseinandersetzen, unser Universum würde in der uns bekannten Form nicht existieren...

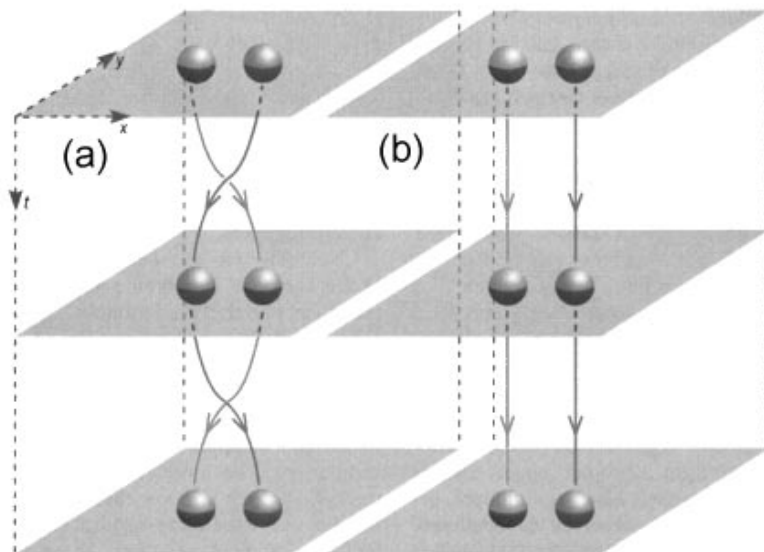


Abb 1: Doppelter Platztausch zweier Teilchen (a) im Vergleich zur trivialen Bewegung (b). Da sich die Raumzeit hier auf drei Dimensionen beschränkt, verknoten sich in (a) die Bahnen der Teilchen unweigerlich (Bild aus [GAM99]).

3. Topologisch-Mathematische Eigenschaften von Anyonen

Zu den charakteristischen Eigenschaften eines Anyons gehört neben der *elektrischen Ladung*¹⁰ seine *magnetische Ladung*, die auch als *magnetischer Fluss* bezeichnet wird. Jedem Anyontyp lässt sich ein bestimmter magnetischer Fluss $g \in G$ zuordnen, wobei G , die Menge aller möglichen Fluss-Zustände, eine endliche Gruppe bildet (Der Zustand eines Anyons kann somit als Element $|g\rangle$ eines Hilbertraumes betrachtet werden). Die Operation, die auf die Elemente dieser Gruppe angewendet werden können, ist dabei die Konjugation des magnetischen Flusses in Form der im letzten Abschnitt besprochenen Vertauschungen¹¹.

3.1. Konjugation von Anyonen durch Vertauschung

Vertauscht man die Position zweier Anyonen in einem zweidimensionalen System, so bewirken Wechselwirkungen zwischen diesen, dass der magnetische Fluss des einen Teilchens den des anderen beeinflusst. Dabei ist es unerheblich, ob sich die Teilchen jeweils auf der kürzesten oder auf einer anderen, zu dieser topologisch äquivalenten (also durch stetige Verformung auf die kürzeste abbildbaren) Bahn bewegen. Entscheidend für die Wirkung der Vertauschung auf den magnetischen Fluss der Teilchen ist lediglich die Richtung des Austauschs, also die Vertauschung im oder gegen den Uhrzeigersinn (siehe Abb 2). Vereinfacht lässt sich sagen: Das Element, welches sich im Vertauschungsprozess auf der unteren Bahn bewegt, behält seinen Fluss bei, während der Fluss des Elements auf der oberen Bahn mit dem Fluss des unteren konjugiert wird. Vertauschen wir zwei Anyonen in den Zuständen $|h\rangle$ und $|g\rangle$ gegen den Uhrzeigersinn miteinander (bzw verschieben wir das rechte Anyon mit dem Fluss $|g\rangle$ über das linke hinweg, vgl Abb 3), so erhalten wir den Zustand $|hgh^{-1}\rangle \otimes |h\rangle$ ¹²:

$$|h\rangle \otimes |g\rangle \rightarrow |hgh^{-1}\rangle \otimes |h\rangle \quad (1)$$

Das rechte Anyon (das sich nach der Vertauschung natürlich links befindet) wird also mit dem Fluss des linken konjugiert. Analog führt eine Vertauschung in die Gegenrichtung zu der Konjugation des Anyons mit dem Fluss $|h\rangle$ mit dem Inversen des Flusses $|g\rangle$, also

$$|h\rangle \otimes |g\rangle \rightarrow |g\rangle \otimes |g^{-1}hg\rangle \quad (2)$$

Vertauscht man zuerst die Teilchen nach der Regel (1) und konjugiert dann nach Re-

¹⁰Die elektrische Ladung spielt in der Quanteninformatik zum Beispiel bei so genannten *Dyonen* eine Rolle, wird im Rahmen dieser Arbeit aber nicht weiter betrachtet.

¹¹Der Einfachheit halber wird in dieser Arbeit teilweise verkürzend von der ‘Konjugation der Anyonen’ gesprochen, gemeint ist aber immer die Konjugation des magnetischen Flusses bzw dessen Vertreter $g \in G$).

¹²Die Schreibweise $|g\rangle \otimes |h\rangle$ bedeutet, dass wir zwei Anyonen mit dem Fluss g und h betrachten, wobei sich das Teilchen mit dem Fluss g links vom Teilchen mit dem Fluss h befindet.

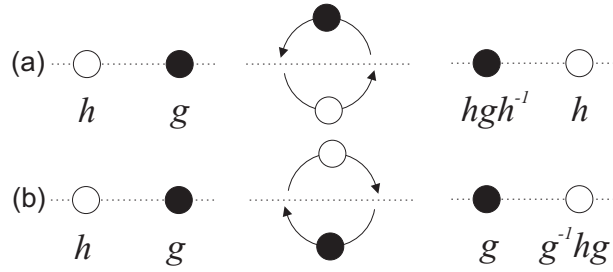


Abb 2: Austausch zweier Anyonen gegen den Uhrzeigersinn (a) und im Uhrzeigersinn (b) (Dargestellt ist jeweils der Zustand vor, während und nach der Vertauschung). Der magnetische Fluss des Anyons mit der oberen Bahn verändert sich jeweils.

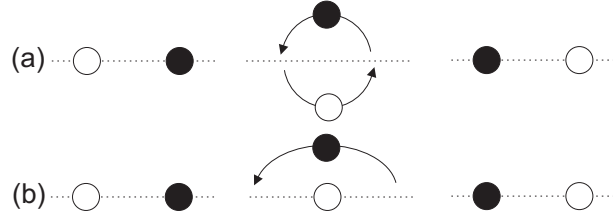


Abb 3: Die Bahnen der Anyonen in (a) sind zu denen in (b) homotop und daher lassen sie sich in ihren Auswirkungen auf den magnetischen Fluss der Quasiteilchen nicht unterscheiden.

gel (2) bzw wendet man zuerst die Regel (2) und dann die Regel (1) an, so erhält man erwartungsgemäß wieder den Originalzustand:

$$\begin{aligned}
 |h\rangle \otimes |g\rangle &\rightarrow |hgh^{-1}\rangle \otimes |h\rangle \rightarrow |h\rangle \otimes |h^{-1}hgh^{-1}h\rangle = |h\rangle \otimes |g\rangle \\
 |h\rangle \otimes |g\rangle &\rightarrow |g\rangle \otimes |g^{-1}hg\rangle \rightarrow |gg^{-1}hg^{-1}g\rangle \otimes |g\rangle = |h\rangle \otimes |g\rangle
 \end{aligned} \tag{3}$$

Eine zweifache Anwendung von (1) bzw (2) führt zu einer hohen Korrelation des Systems, der Fluss jedes Teilchens ist vom ursprünglichen Fluss des anderen beeinflusst:

$$\begin{aligned}
 |h\rangle \otimes |g\rangle &\rightarrow |hgh^{-1}\rangle \otimes |h\rangle \rightarrow |hghg^{-1}h^{-1}\rangle \otimes |hgh^{-1}\rangle \\
 |h\rangle \otimes |g\rangle &\rightarrow |g\rangle \otimes |g^{-1}hg\rangle \rightarrow |g^{-1}hg\rangle \otimes |g^{-1}h^{-1}ghg\rangle
 \end{aligned} \tag{4}$$

Für die quanteninformatische Nutzung, also die Anwendung des topologischen Effekts zur Berechnung von Funktionen, wäre eine Folge von Vertauschungen interessant, die den Fluss des einen Teilchens mit dem Fluss des anderen konjugiert und das konjugierende Teilchen invariant lässt (vgl Konjugation (1)), dabei aber die Position der Teilchen nicht verändert. Des weiteren möchte man Interaktionen mit dem übrigen System möglichst vermeiden. Erreicht werden kann dieses Ziel, indem man nicht einzelne Anyonen mit dem Fluss $|g\rangle$ betrachtet, sondern Anyonenpaare im Zustand $|g\rangle \otimes |g^{-1}\rangle$, die global betrachtet einen *trivialen Fluss* besitzen (Eine Umkreisung eines solchen Anyonenpaares hat also keine Auswirkungen auf das umkreisende Quasiteilchen). Eine vierfache Vertauschung

einzelner Anyonen im Uhrzeigersinn in einem System aus zwei Anyonenpaaren führt nun zum gewünschten Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 & |h\rangle \otimes |h^{-1}\rangle \otimes |g\rangle \otimes |g^{-1}\rangle \\
 \rightarrow & |h\rangle \otimes |g\rangle \otimes |g^{-1}h^{-1}g\rangle \otimes |g^{-1}\rangle \\
 \rightarrow & |h\rangle \otimes |g\rangle \otimes |g^{-1}\rangle \otimes |h^{-1}\rangle \\
 \rightarrow & |h\rangle \otimes |g\rangle \otimes |h^{-1}\rangle \otimes |hg^{-1}h^{-1}\rangle \\
 \rightarrow & |h\rangle \otimes |h^{-1}\rangle \otimes |hgh^{-1}\rangle \otimes |hg^{-1}h^{-1}\rangle
 \end{aligned} \tag{5}$$

Betrachtet man grundsätzlich nur Anyonenpaare mit trivialen Gesamtfluss, so kann man zu einer vereinfachten Notation übergehen, die jeweils nur das linke Element des Paares aufführt, was die Berechnung (5) verkürzt zu:

$$|h\rangle \otimes |g\rangle \rightarrow |h\rangle \otimes |hgh^{-1}\rangle \tag{6}$$

Eine Alternative stellt das „Durchschieben“ eines Anyonenpaars durch ein anderes dar (siehe Abb 4):

$$|h\rangle \otimes |g\rangle \rightarrow |h\rangle \otimes |h^{-1}gh\rangle \tag{7}$$

Die Betrachtung von Anyonen-Paaren anstelle einzelner Quasiteilchen hat zudem den

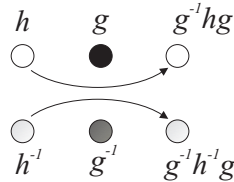


Abb 4: Ein Anyonen-Paar mit trivialem Fluss (links) wird durch ein anderes geschoben und so der Fluss des ersten Paares konjugiert. Das „äußere“ Paar im Zustand $|g\rangle \otimes |g^{-1}\rangle$ bleibt dabei unverändert.

Vorteil, dass das gesamte Paar eine Ladung besitzen kann, auch wenn die einzelnen Elemente selbst keine Ladung tragen. Diese Ladung kann experimentell (zB mit einem Mach-Zehnder-Interferometer) gemessen werden und diese Messung wird versetzen uns in die Lage, Anyonen in Superpositions-Zuständen zu erzeugen (vgl Abschnitt 5.1) – eine grundlegende Voraussetzung für den Einsatz von Anyonen in Quantencomputern, um hochgradig parallele Berechnungen zu ermöglichen (siehe auch [PRES98]).

3.2. Fehlertoleranz der topologischen Aktionen

Wie wir festgestellt haben, ist die Fluss-Konjugation der Anyonen nicht vom konkreten Weg abhängig, den das Anyon bei der Vertauschung nimmt, sondern lediglich von der Richtung bzw der Häufigkeit, mit der ein Anyon das andere umkreist (also von

der Homotopieklasse der Anyonen-Bahnen, vgl Abb 5). Dies bedeutet, dass das Sys-

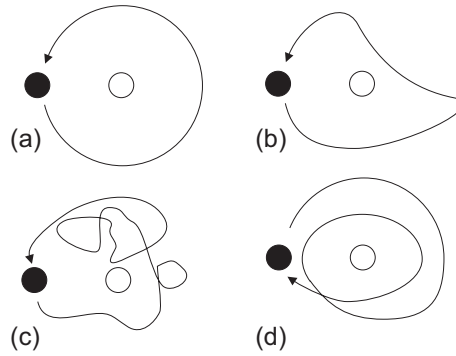


Abb 5: Die Bahnen (a), (b) und (c) können stetig ineinander überführt werden, sie sind zueinander „topologisch äquivalent“ (und führen so zum gleichen Konjugations-Ergebnis), (d) hingegen nicht.

tem gegenüber kleinen, lokalen Störungen des Vertauschungsprozesses tolerant ist (die meisten Störungen, die natürlich auftreten, sind lokal, da sie durch Wechselwirkungen der Informationsträger mit ihrer direkten Umwelt, zB durch einen Quantensprung oder Vakuum-Erzeugung, hervorgerufen werden).

4. Rechnen mit Anyonen

Nachdem wir uns in den vorausgegangenen Abschnitten mit der Frage beschäftigt haben, was Anyonen sind und welche Effekte beim Verschieben von Anyonen auftreten, wollen wir uns nun überlegen, ob die topologischen Eigenschaften alleine genügen, einen universellen Quantencomputer¹³ zu bauen.

4.1. Manipulation von Anyonen-Zuständen

Der magnetische Fluss von Anyonen kann nicht nur die von *Qubits* her bekannten zwei Basiszustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ repräsentieren, sondern vielmehr jeden von d verschiedenen Zuständen, soweit d eine Primzahl ist. Die Basis des Hilbertraumes, in dem wir dann unsere Berechnungen durchführen, ist gegeben durch $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |d-1\rangle\}$ (Wie diese mit der im vorigen Abschnitt erwähnten Gruppe G in Verbindung stehen, wird im Rahmen von Gleichung 18 erläutert). Anyonen mit deren Fluss-Eigenschaften mit dieser Basis beschrieben werden, heißen *Qudits* und lassen sich mit den Operationen Z und X manipulieren:

$$Z|i\rangle = \omega^i|i\rangle \quad (i = 0, \dots, d-1) \quad (8)$$

$$X|i\rangle = |i+1\rangle \quad (i = 0, \dots, d-1) \quad (9)$$

ω stellt dabei eine nicht-triviale, primitive d -te Einheitswurzel dar und die Addition in Gleichung (9) wird *modulo* d durchgeführt. Man kann Z als Phasenverschiebung des Zustandes im Hilbertraum betrachten und X als Schift-Funktion,¹⁴ die ein Element aus der geordneten Basis des Raumes (also einem nicht überlagerten Zustand) in das nächste Element der Basis transformiert. Die Wirkung durch die Operatoren ist also bezüglich einer Rechenbasis gegeben und kann linear fortgesetzt werden. X und Z sind vertauschbar, es gilt nämlich $ZX = XZ\omega$.

Schreibt man nun einen beliebigen Zustand $|u\rangle$ in Koordinatenform, also als Vektor zu der gegebenen Basis¹⁵, so lassen sich die beiden Operationen als Matrix-Multiplikation beschreiben:

$$Z|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega^{d-1} \end{pmatrix} |u\rangle \quad (10)$$

¹³Also einen Quantencomputer, der jede berechenbare Funktion auch berechnen kann.

¹⁴Das Wort *schiften* hat aus der Seemannssprache Einzug in die Informatik gefunden und bedeutet ursprünglich *die Ladung umschichten, verlagern, verschieben*.

¹⁵Ist zB die Basis als $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ gewählt, so würde der Zustand $|0\rangle + |1\rangle$ als Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Zustand $27|0\rangle - 13|1\rangle$ als $\begin{pmatrix} 27 \\ -13 \end{pmatrix}$ dargestellt.

$$X|u\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} |u\rangle \quad (11)$$

Betrachtet man den Hilbertraum der *Qubits*, also $d = 2$ mit Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, so ergibt sich¹⁶:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Betrachtet man die Eigenvektoren von Z , so stellt man fest, dass diese mit den oben gewählten Basisvektoren $|i\rangle$ übereinstimmen. Die Eigenvektoren $|\tilde{i}\rangle$ von X , die als Menge wiederum eine Basis des betrachteten Hilbertraumes bilden, sind

$$|\tilde{i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} \omega^{-ij} |j\rangle \quad (14)$$

Daraus folgt die Wirkung der Operatoren Z und X als

$$Z|\tilde{i}\rangle = |\widetilde{i-1}\rangle \quad (15)$$

$$X|\tilde{i}\rangle = \omega_i |\tilde{i}\rangle \quad (16)$$

wobei $i = 0, \dots, d-1$ gilt und die Subtraktion wieder *modulo* d zu verstehen ist. Auf $|\tilde{i}\rangle$ wirkt also nun Z als Schiebe- und X als Phasenoperator.

4.2. Universelle Quanten-Gatter

Ein universell einsetzbare Quantencomputer kann nach [MOCH03] alleine aus folgenden Grundoperationen zusammengesetzt werden:

1. Nicht-Destruktives Messen von Z
2. Nicht-Destruktives Messen von X
3. Anwendung des Toffoli auf je drei *Qudits*

Der Toffoli T ist definiert als $T(|l, m, n\rangle) = |l, m, lm + n\rangle$, *nicht-destruktiv* bedeutet in diesem Zusammenhang, dass durch die Messung keine Anyonen zerstört werden.

Mit Messen eines Operators ist hierbei deren Anwendung auf zwei *Qudits* gemeint. Physikalisch wird dazu eine Messung zu einer Basis aus Eigenvektoren des entsprechenden Operators durchgeführt, zB eine Phasenmessung (vgl Abschnitt 5.1). Ein *Qudit*, das

¹⁶X ist in diesem Spezialfall als Spiegelung zu verstehen.

wir zum Beginn der Messung in einen definierten Zustand bringen, wird dabei durch den Messprozess verändert, das andere *Qudit* wird zum Kontrollieren bzw Steuern der Messung verwendet, dh es beeinflusst das Messergebnis, ohne selbst beeinflusst zu werden. So ergibt im *Qubit*-Fall die Messung von Z bzgl des überlagerten Zustands $|0\rangle + |1\rangle$ bei einem Steuer-Qubit im Zustand $|0\rangle$ keine Veränderung der Eingangswerte, bei der Kontrolle durch $|1\rangle$ hingegen erhalten wir den Zustand $|0\rangle - |1\rangle$, vgl Abb 6:

$$|\lambda\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow |\lambda\rangle \otimes (|0\rangle + \lambda|1\rangle) \quad (17)$$

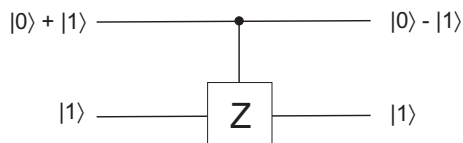


Abb 6: Messen des Operators Z : Das obere Qubit wird verändert, da das untere sich im Zustand $|1\rangle$ befindet. Das Kontroll-Qubit in einem Eigenzustand der Funktion (unten) wird durch den Messprozess nicht verändert.

Der Zustand $|0\rangle - |1\rangle$ ist zu $|0\rangle + |1\rangle$ orthogonal und daher perfekt von diesem unterscheidbar. Befindet sich das Steuer-Qubit in einem Überlagerungszustand $a|0\rangle + b|1\rangle$, so detektieren wir mit der Wahrscheinlichkeit $|a|^2$ einen $|0\rangle$ -Zustand als Steuereingabe und mit der Wahrscheinlichkeit $|b|^2$ den $|1\rangle$ -Zustand.

4.2.1. Voraussetzungen für einen Anyonen-Rechner

Um eine die oben gegebene Menge von universellen Grundoperationen technisch zu realisieren, müssen nach [MOCH03] folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Zwei Anyonen können vertauscht werden, um die Konjugation des magnetischen Flusses der Anyonen, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, zu ermöglichen.
2. Man kann ein Teilchenpaar verschmelzen und danach feststellen, ob ein Rest-Teilchen übrig ist oder ob die Teilchen sich gegenseitig ausgelöscht haben.
3. Es lassen sich neue Teilchenpaare erzeugen, die zusammen trivialen Fluss besitzen.
4. Für jedes Element g einer Gruppe G lassen sich Teilchenpaare $|g\rangle \otimes |g^{-1}\rangle$ erzeugen, wobei die elektrischen Ladungen der Teilchen sich gegenseitig aufheben.

Die Gruppe G , die den magnetischen Fluss der Anyonen modelliert, sei dabei einfach und perfekt¹⁷. Um eine Basis für den Hilbertraum zu definieren, in dem wir mit Hilfe des magnetischen Flusses von Anyonen Berechnungen durchführen wollen, wählen wir zwei nicht-kommutierende Elemente a und b aus G . Die Dimension des Hilbertraums

¹⁷Im Prinzip lassen sich alle hier durchgeführten Überlegungen auch allgemein auf beliebige nicht auflösbare Gruppen ausdehnen, der Leser sei dabei auf [MOCH03] verwiesen.

ist bestimmt durch das kleinste d , für das die Gleichung $a^d b a^{-d} = b$ erfüllt ist (d sei Primzahl). Die Basis des Hilbertraums ist nun gegeben durch die Anyonenpaare¹⁸

$$|n\rangle = |a^n b a^{-n}\rangle \quad (\text{für } 0 \leq n < d) \quad (18)$$

G hat, wie jede einfache nicht-abelsche Gruppe, eine gerade Anzahl von Elementen (vgl [MOCH03]) und enthält so wegen der Sylow-Sätze ein Element $a \neq 1$ mit $a^2 = 1$. Daher können wir uns, auch wenn der allgemeine Fall vielleicht eleganter oder zweckmäßiger wäre, auf *Qubit*-Systeme, also $d = 2$ beschränken. Die kleinste bekannte einfache und nicht-abelsche Gruppe ist die A_5 und enthält als Elemente alle geraden Permutationen auf fünf Objekten¹⁹. Als Element a wählt man, um eine Rechenbasis für ein *Qubit*-System zu erzeugen, eine Permutation so, dass a^2 gleich der Identität ist, zB $a = (1\ 2)(3\ 4)$. Ein zu a nicht kommutatives Element ist $b = (3\ 4\ 5)$, welches mit a den Hilbertraum aufspannt durch:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= |b\rangle = |(3\ 4\ 5)\rangle \\ |1\rangle &= |aba^{-1}\rangle = |(4\ 3\ 5)\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

4.2.2. Messen des Z -Operators

Um bezüglich der Eigenzustände des Z -Operators Messungen durchzuführen, versuchen wir, jedes der zu messenden *Qudits* mit einem Anyons in einem inversen Eigenzustand des Z -Operators zu verschmelzen. Wenn die Ladungen sich gegenseitig aufheben, so waren beide zueinander invers und das übrig gebliebene Teilchen des Eigenzustands ist das Ergebnis der Messung. Da die Messung nicht immer das korrekte Ergebnis liefert, muss sie mehrfach durchgeführt werden. Dazu benötigt man viele „Kopien“ des zu messenden Anyons mit identischem magnetischen Fluss, die aber aufgrund des so genannten *no-cloning-theorems* nicht exakt erzeugt werden können. Mit Hilfe einer *kontrollierten Summe* (mit Steuer-Eingang $|0\rangle$) können aber Zustände erzeugt werden, die bezüglich einer Messung in der Z -Basis das gleiche Ergebnis erzeugen und somit für unsere Zwecke zum Ursprungszustand äquivalent sind (Die kontrollierte Summe kann mit einem *Toffoli* erzeugt werden, bei dem ein Eingang konstant auf $|1\rangle$ gesetzt wird):

$$\sum_i C_i |i\rangle \rightarrow \sum_i C_i |i\rangle \otimes |i\rangle \otimes |i\rangle \otimes \dots \otimes |i\rangle \quad (20)$$

¹⁸Das inverse Teilchen $|a^n b^{-1} a^{-n}\rangle$ wird zur einfacheren Lesbarkeit hier und im Folgenden weggelassen.

¹⁹Unglücklicherweise ist diese Gruppe mit 60 Elementen schon ziemlich groß und unpraktisch, aber bisher konnte noch keine kleinere entdeckt werden.

4.2.3. Messen des X -Operators

Auch das Messen von X liefert nicht immer das korrekte Ergebnis, so dass wir ebenfalls Kopien des zu messenden Zustandes erzeugen müssen, hier mit Hilfe eines kontrollierten X^{-1} -Operators²⁰ (Steuer-Qubit: $|0\rangle$):

$$\sum_i C_i |\tilde{i}\rangle \rightarrow \sum_i C_i |\tilde{i}\rangle \otimes |\tilde{i}\rangle \otimes |\tilde{i}\rangle \otimes \dots \otimes |\tilde{i}\rangle \quad (21)$$

Die Messung selber wird analog zu der von Z durchgeführt, jetzt jedoch bezüglich der Eigenzustände von X , gegeben durch

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} \omega^{-ni} |i\rangle \quad (22)$$

Um die Messung von X durchzuführen, benötigt man Anyonen, die einen Fluss in diesem Eigenzustand von X besitzen, es gilt also, ω korrekt festzulegen. Dazu muss man zunächst aus dem Nichts Paare erzeugen, die den $|\tilde{0}\rangle$ Zustand repräsentieren:

$$|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle \quad (23)$$

Da die aus dem Vakuum erzeugten Paare nicht immer die geforderten Eigenschaften besitzen (sondern teilweise sowohl magnetischen, als auch elektrischen Fluss besitzen), filtert man die unerwünschte Anyonenpaare mit einer in [MOCH03] näher beschriebenen Methode heraus. Die *kontrollierte X^{-1} -Funktion* erlaubt nun in zwei Schritten die Erzeugung von $|\tilde{i}\rangle$ -Zuständen aus $|\tilde{0}\rangle$:

$$|\tilde{0}\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |\tilde{i}\rangle \otimes |\tilde{i}\rangle \quad (24)$$

$$|\tilde{0}\rangle \otimes |\tilde{i}\rangle \rightarrow |\tilde{i}\rangle \otimes |\tilde{i}\rangle \quad (25)$$

Sind die erzeugten $|\tilde{i}\rangle$ Zustände identisch mit $|\tilde{0}\rangle$, so muss die Prozedur wiederholt werden, andernfalls nennen wir den erzeugten Zustand $|\tilde{1}\rangle$, indem wir das in der Definition der Eigenzustände verwendete ω entsprechend festsetzen:

$$|\tilde{1}\rangle := |\tilde{i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} \omega^{-j} |j\rangle \quad (26)$$

Die weiteren Eigenzustände von X können mit dem nun bekannten ω definiert werden. Sowohl die Messung von X , als auch die von Z sind relativ fehlertolerant, da die Wahr-

²⁰Der X^{-1} -Operator ist eine so genannte *klassische Funktion* und kann als solche mit Hilfe des Toffoli-Operators berechnet werden, siehe auch Abschnitt 4.2.4

scheinlichkeit eines Fehlers mit der Anzahl der Anyonen-Verschmelzungen exponentiell abnimmt.

4.2.4. Konjugation eines Zustandes mit einer Funktion

In Gleichung (6) wurde dargestellt, wie ein Anyon im Zustand $|g\rangle$ mit einem im Zustand $|h\rangle$ konjugiert wurde. Allgemein lässt sich der Fluss eines Anyons auch mit dem Produkt mehrerer Flüsse $|h_1 h_2 \dots h_n\rangle$ konjugieren:

$$|h_1 h_2 \dots h_n\rangle \otimes |g\rangle \rightarrow |h_1 h_2 \dots h_n\rangle \otimes |h_1 h_2 \dots h_n g h_n^{-1} \dots h_2^{-1} h_1^{-1}\rangle \quad (27)$$

Die einzelnen h_i können dabei Anyonen in unbekanntem Zuständen sein. Dies ermöglicht, Anyonen mit jeder Funktion f zu konjugieren, die als Produkt von Zuständen $|h_i\rangle$, deren Inversen $|h_i^{-1}\rangle$ und festen Elementen aus G dargestellt werden kann. Ist G eine einfache und perfekte endliche Gruppe, so kann jede beliebige Funktion $f(h_1, h_2, \dots, h_n) : G^n \rightarrow G$ in dieser Form dargestellt werden (Beweis: siehe [MOCH03]). Dies bedeutet, dass jede klassische Funktion berechnet werden kann, mithin auch das für die universelle Gatter-Menge benötigte *Toffoli*-Gatter:

$$T(|a^i b a^{-i}, a^j b a^{-j}, a^k b a^{-k}\rangle) = |a^i b a^{-i}, a^j b a^{-j} a^{ij+k} b a^{-ij-k}\rangle \quad (28)$$

Im oben erwähnten Beispiel mit A_5 würde die zur Berechnung des *Toffoli* notwendige Funktion $f(a^i b a^{-i}, a^j b a^{-j}) = a^{ij}$ neun elementare Konjugationen benötigen²¹:

$$f(h_1, h_2) = \{(5\ 2\ 1) h_1 (1\ 4\ 3\ 5\ 2) h_2 (1\ 2\ 4) h_1^{-1} (1\ 5\ 3\ 4\ 2) h_2^{-1} (5\ 2\ 1)\} \quad (29)$$

Alternativ lässt sich das *Toffoli*-Gatter mit 16 „Durchschiebe-Operationen“ und sechs Anyonen-Paaren wie in Abbildung 4 realisieren. Für Gruppen kleiner als A_5 konnte bisher kein *Toffoli* gefunden werden (siehe [PRES98]). Da A_5 die kleinste endliche nicht-auflösbare Gruppe ist, liegt die Annahme nahe, dass die Nichtauflösbarkeit eine notwendige Voraussetzung für das universelle Quanten-Rechnen mit Hilfe von Konjugation ist.

²¹Zur Herleitung sei erneut auf [MOCH03] verwiesen.

5. Überlegungen zur Implementierung

Im letzten Kapitel wurde aufgezeigt, dass theoretisch ein universeller Quantencomputer auf Basis der topologisch hervorgerufenen Konjugation des magnetischen Flusses von Anyonen realisierbar ist. Hier sollen sich nun abschließend einige Vorschläge zur konkreten Implementierung und den damit verbundenen Schwierigkeiten vorgestellt werden.

5.1. Messen des magnetischen Flusses

Eine elektrische Ladung, die ein magnetisches Flussteilchen (also ein Teilchen mit magnetischem Fluss) umkreist, verändert die Wellenfunktion des Flussteilchens Wellenfunktion. Mit Hilfe dieser Wechselwirkung ist man in der Lage, den magnetischen Fluss zu messen, indem man zum Beispiel mit einem *Mach-Zehnder-Interferometer* eine definierte Ladung am magnetischen Fluss streut und – entsprechende Kalibrierung vorausgesetzt – zwei orthogonale Zustände u_1 und u_2 mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit unterscheiden kann. Eine genügend große Anzahl Testladungen vorausgesetzt kann der Fluss im Interferometer mit einer hohen Genauigkeit bestimmt werden. Ein Flussteilchen im Überlagerungszustand $a|u_1\rangle + b|u_2\rangle$ wird von der Messung entweder mit der Wahrscheinlichkeit $|a|^2$ auf den Zustand $|u_1\rangle$ oder mit der Wahrscheinlichkeit $|b|^2$ auf $|u_2\rangle$ projiziert (siehe Abb 7).

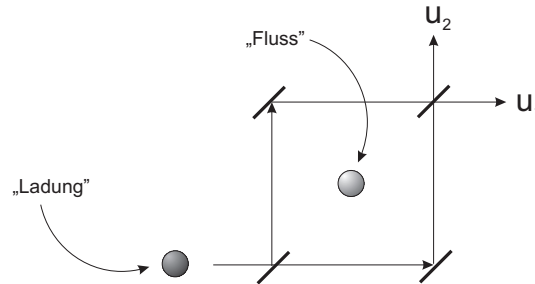


Abb 7: Schematische Darstellung eines Mach-Zehnder-Interferometers für Anyonen. Eine Testladung durchquert das System und verlässt es auf der einen Seite, wenn der magnetische Fluss des Anyons in der Mitte $|u_1\rangle$ beträgt und auf der anderen bei einem Fluss von $|u_2\rangle$.

Analog kann man mit einem *Mach-Zehnder-Interferometer* und einem geeichten Flussteilchens die elektrische Ladung eines Anyons bestimmen. Insbesondere lässt sich dieses Messverfahren dazu einsetzen, Überlagerungszustände wie $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ oder $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ zu erzeugen (vgl [PRES98]).

5.2. Zweidimensionale Elektronengase

Real existierenden Anyonen versucht man natürlich zunächst einmal in zweidimensionalen Umgebungen zu finden, also in Experimenten, in denen die Bewegungsfreiheit eines Teilchens auf zwei Dimensionen eingeschränkt ist. Dies ist zum Beispiel in *zweidimensionale Elektronengase* (2DEG) der Fall, die an den Grenzschichten zwischen zwei

Halbleitern, zB Gallium-Arsenit und Gallium-Aluminium-Arsenit, auftreten (vgl Abb 8). Die Elementarteilchen in diesen Schichten zeigen besondere Effekte (zum Beispiel ein besonderes Potential-Verhalten), die auf die Zweidimensionalität der Umgebung zurückzuführen sind. Bisher konnte man jedoch trotz intensiver Suche keine Anyonen in 2DEG experimentell nachweisen.

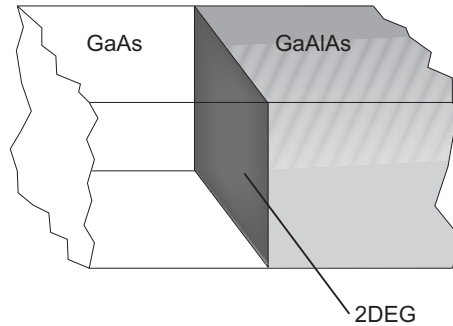


Abb 8: An der Grenzfläche zwischen zwei stromdurchflossenen Halbleitermaterialien werden Elektronen gewissermaßen zweidimensional eingesperrt und bilden ein so genanntes 2D-Elektronengas (2DEG).

Der fraktionale Quanten-Hall-Effekt, der in solchen Systemen unter Einwirkung eines starken Magnetfelds auftritt und 1983 von Robert B. Laughlin experimentell nachgewiesen und erklärt werden konnte²² lässt auf das Vorhandensein von *Composite Fermions* schließen. Diese Elementarteilchen besitzen im Gegensatz zu den Teilchen in dreidimensionalen Umgebungen eine gebrochenzahlige elektrische Ladung. Bei einem dieser Teilchen handelt es sich um ein Quasi-Loch, das bei einem Füllfaktor etwas unterhalb von $\frac{1}{3}$ des untersten Landau-Niveaus auftritt und als ein isoliertes magnetisches Flussquantum aufgefasst werden kann. Drei dieser Quasi-Löcher können sich zu einem elektronischen Loch (also einem fehlenden Elektron) vereinigen (mehr dazu in [GRIF00]).

5.3. Topologisch nichttriviale Räume

Beim Vertauschen zweier Anyonen stellt aus der Sicht des eines Anyons das andere Anyon (wegen des Pauli-Prinzips, nach dem sich keine zwei Teilchen am gleichen Ort aufhalten dürfen) einen verbotenen Bereich (also einen Bereich mit Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi(x_0)|^2 = 0$) im Raum dar, weswegen im Zweidimensionalen eine Bahn links um das Teilchen herum nicht ohne „zerschneiden“ in eine Bahn rechts um das Teilchen überführt werden kann (die Bahnen sind nicht homotop). In einer dreidimensionalen Umgebung ist es jedoch vorstellbar, die eine Bahn „über das Teilchen hinweg“ zu bewegen und so stetig auf die andere abzubilden (siehe Abb 9(b)). In einem Experiment, das Yakir Aharonov und David Bohm 1959 durchgeführt haben, erzeugt ein starkes lokales Magnetfeld plastisch betrachtet ein unendlich langes Loch, das den gesamten dreidimensionalen Raum durchzieht. Dadurch wird der Raum „nichttrivial“: die Bewegungen um das Magnetfeld herum sind zueinander nicht mehr alle homotop (Abb 9). Elektronen, die die Flussröhre

²²Wofür er 1998 zusammen mit Frank Wilczek und Horst L. Störmer den Nobelpreis erhielt.

umkreisen, verhalten sich nun in gewissen Grenzen wie Anyonen mit fraktioneller Statistik, wobei die Stärke des Magnetfeldes die Austauschphase und damit den Typ der Anyonen bestimmt.

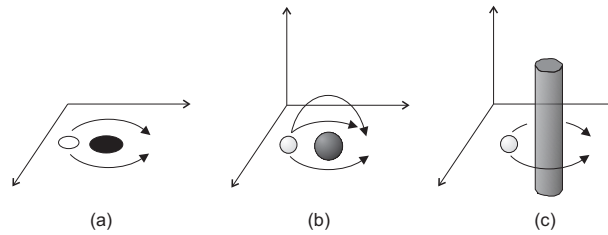


Abb 9: Die Räume in (a) und (c) sind topologisch nicht trivial, in (b) hingegen lässt sich jede beliebige Bahn stetig (dh ohne „Zerschneiden“, mit Hilfe einer monotonen, stetigen Abbildung) in jede andere überführen.

5.4. Ausblick

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Überlegung zur Herstellung eines topologischen Quantencomputers mit Hilfe von Anyonen zwar sehr vielversprechend sind, es bisher aber noch nicht gelungen ist, die physikalischen Voraussetzungen zur Implementierung eines solchen zu schaffen. Es gibt aber Ansätze, topologische Quanten-Effekte zB in Atom-Magnet-Resonanz-Geräten, mit Hilfe von Josephson-Kontakten oder in Atomen, die Quantenpunkten gefangen sind, zu realisieren und für quanteninformatische Berechnungen zu nutzen, so dass noch viele Forschungsergebnisse zu diesem Thema zu erwarten sind.

A. Mathematische Grundbegriffe

Basis Die Menge der Elemente $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ eines n -dimensionalen *linearen Raums*, die miteinander verknüpft den ganzen Raum ergeben, für jeden Vektor x des Raumes also gilt: $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ ($\alpha_i \in \mathbb{C}$), nennt man *Basis*.

Gruppe Eine Gruppe $G = (M, *)$ besteht aus Elementen g, h, j, \dots einer Menge M und einer Verknüpfung $*$ auf den Elementen, deren Ergebnis wieder ein Element aus M darstellt, also $g * h \in M$. Zusätzlich gilt das Assoziativgesetz, also $(g * h) * j = g * (h * j)$, es existiert ein *neutrales Element* $e \in M$, dass bei Verknüpfung mit einem anderen Gruppenelement dieses unbeeinflusst lässt (also $e * g = g$) und für jedes $g \in G$ gibt es ein g^{-1} (das so genannte *inverse Element*), so dass $g * g^{-1} = e$. Gilt zudem das Kommutativgesetz ($a * b = b * a$) für alle Elemente aus G , so nennt man die Gruppe *abelsch*. Die Gruppe G ist *endlich*, wenn M nur endlich viele verschiedene Elemente enthält. Eine Gruppe, die nur aus dem Neutralelement besteht ($\{e\}$) wird *trivial* genannt. Eine Gruppe heißt *einfach*, wenn sie außer sich selbst und der *trivialen Untergruppe* keine weiteren *normalen Untergruppen* enthält.

Hilbertraum Unter einem Hilbertraum versteht man einen *vollständigen, unitären Raum* mit einem von der Norm induzierten Skalarprodukt. *Vollständig* bedeutet, dass jede *Cauchy-Folge* (eine Folge, bei der der Abstand zwischen zwei Folgegliedern bzgl. des von der Norm induzierten Skalarprodukts irgendwann immer kleiner wird) gegen ein Element, das ebenfalls im Raum liegt, konvergiert (*topologischer Grenzwert*).

Konjugation Zu jedem Element g einer Gruppe G gehört ein inverses Element g^{-1} . Verknüpft man ein beliebiges Element h der Gruppe von links mit $g \in G$ und von rechts mit dem Inversen $g^{-1} \in G$, so nennt man diese Operation ($h \mapsto ghg^{-1}$) die „Konjugation von h mit g “. Sind g und h zum Beispiel Matrizen linearer Abbildung, so beschreibt die Konjugation einen Basiswechsel.

Kommutierende Elemente Zwei Elemente a und b einer Gruppe *kommutieren* miteinander, wenn $a * b = b * a$ gilt.

Kommutatorgruppe Die Kommutatorgruppe $[G, G]$ einer Gruppe G besteht aus allen Elementen, die sich aus den Verknüpfungen $aba^{-1}b^{-1}$ (*Kommutatoren*, $[a, b]$) von allen Elementen $a, b \in G$ erzeugen lassen ($[G, G] = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$). Die Kommutatorgruppe ist in jedem Fall eine *Untergruppe* von G .

Linearer Raum Ein linearer Raum besteht aus Elementen x, y, \dots (*Punkte, Vektoren*) einer Menge M , die mit der Addition (+) als Verknüpfung eine *abelsche Gruppe*

bilden und deren Elemente mit komplexen Zahlen $(\alpha, \beta, \dots \in \mathbb{C})$ multipliziert werden können:

$$\begin{aligned}\alpha(x + y) &= \alpha x + \alpha y \\ (\alpha + \beta)x &= \alpha x + \beta x \\ \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x \\ 1 * x &= x \\ 0 * x &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Perfekte Gruppe Eine Gruppe heißt *perfekt*, wenn sie mit ihrer *Kommutatorgruppe* identisch ist, also jedes Element $g \in G$ als *Kommutator* zweier (anderer) Elemente $a, b \in G$ dargestellt werden kann: $g = aba^{-1}b^{-1}$.

Permutation Eine Permutation stellt eine vollständige Abbildung einer Menge auf sich selber dar, wobei jedem Element genau ein anderes zugeordnet wird. Besteht die Menge zB aus den fünf Elementen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, so wäre die Zuordnung $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 5$ und $5 \rightarrow 4$ eine Permutation. Da jede Permutation nur aus Zyklen besteht, kann man die Darstellung verkürzen zu $(123)(45)$ (Jede geklammerte Liste entspricht einem Vertauschungszyklus). Eine Permutation, die nur zwei Elemente vertauscht und alle anderen konstant lässt, nennt man *Transposition*. Jede Permutation lässt sich als Hintereinanderausführung von Transpositionen darstellen, ist die Anzahl der benötigten Transpositionen gerade, so bezeichnet man auch die Hintereinanderausführung als *gerade Permutation*.

Primitive Einheitswurzel Das Element $p \in G$, welches bei fortlaufender Verknüpfung mit sich selbst nach und nach die gesamte Gruppe G erzeugt (G habe d Elemente, d sei eine Primzahl), heißt *primitive (d -te) Einheitswurzel*.

Unitärer Raum Einen *linearen Raum* nennt man *unitär*, wenn auf ihm ein Skalarprodukt definiert ist, also eine Möglichkeit besteht, den „Winkel“ zwischen zwei Vektoren zu messen. Dies impliziert das Vorhandensein einer *Norm* (und damit eines Abstandbegriffs).

Untergruppe Ist $G = (M, *)$ eine *Gruppe* und U eine Teilmenge von M , die bezüglich der Verknüpfung $+$ auch eine Gruppe bildet, so nennt man U eine Untergruppe von G . Kann man zusätzlich jedes Element $h \in U$ mit einem beliebigen Element $g \in G$ konjugieren und dass Ergebnis liegt wieder in U (also $ghg^{-1} \in U$), so nennt man U eine *normale Untergruppe*.

Unitärer Operator Eine überall im Hilbertraum H definierte Operation U , die H auf sich selbst abbildet, heißt unitär, wenn für alle $h, g \in H$ das Skalarprodukt von h und g gleich dem Skalarprodukt von $U(h)$ mit $U(g)$ ist.

Literatur

- [GAM99] Gamboa, Jorge F., José L. Cortés und Luis F. Velázquez: *Fraktionale Statistiken und Topologie*, Spektrum der Wissenschaft, 06/1999, Seite 74, Heidelberg: Spektrum, 1999
- [GRIF00] Griffith, T.G. et al: *Evolution of Quasi-Particle Charge in the Fractional Quantum Hall Regime*, Phys. Rev. Lett. 85 (3918), 2000
- [LAN99] Lang, Georg Robert: *Anyonische Quantenmechanik: Streutheorie und gebundene Zustände im Zweiteilchenfall*, Fachbereich der Physik der FU Berlin, Berlin, 1999
- [MESCH72] Meschkowski, Herbert: *Mathematisches Begriffswörterbuch*, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1972
- [MOCH03] Mochon, Carlos: *Anyons from non-solvable finite groups are sufficient for universal quantum computation*, Institute for Quantum Information, California Institute of Technology, Pasadena, 2003
- [PHYS00] *Lexikon der Physik*, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000
- [PRES98] Preskill, John: *Fault-Tolerant Quantum Computation*, S 213 ff in Hoi-Kwong Lo, Sandu Popescu, Tim Spiller (Hrsg): *Introduction to quantum computation and information*, World Scientific Publishing Company, 1998
- [VED02] Vedral, Vlatko: *Geometric phases and topological quantum computation*, International Journal of Quantum Information, Vol.1, No.1 (2003), World Scientific Publishing Company, 2002